

به نام خدا

تمرین سری دوم درس پردازش سیگنال های زیستی

متغیرهای تصادفی



۱- فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n مستقل از یکدیگر بوده و توزیع یکسانی دارند. توابع چگالی احتمال و توزیع هر یک را $f(x)$ و $F(x)$ فرض کنید. تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بر حسب $f(\cdot)$ یا $F(\cdot)$ بیان کنید.

$$Y_1 = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ (الف)}$$

$$Y_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ (ب)}$$

$$Y_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ (ج)}$$

۲- تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y بصورت زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟

ب) تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z=X+Y$ یعنی $F_Z(z)$ را بدست آورید.

۳- دو متغیر تصادفی X و Y با pdf زیر در نظر بگیرید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{16} x^2 y, & 0 < y < x \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) تابع چگالی احتمال شرطی و کناری X و Y را بدست آورید.

ب) واریانس X و واریانس Y و نیز ضریب همبستگی بین X و Y را بدست آورید.

۴- متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطه $Y = e^{X/a}$ را دارد که در آن a مقدار ثابتی است و متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $X \sim N(m, \sigma^2)$ می باشد.

الف) متوسط و واریانس Y را بر حسب m ، a و σ^2 بدست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال Y را بدست آورید.

۵- متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطه زیر را دارد. تابع چگالی احتمال Y را برحسب تابع چگالی احتمال و یا تابع توزیع احتمال X بدست آورید.

$$Y = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

۶- متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطه $Y = \sin X$ را دارد و متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x) = \frac{2x}{\pi^2}, 0 < x < \pi$ می باشد. تابع چگالی احتمال Y را بدست آورید.