

۱- فرایند نویز سفید غیر ساکن $V(t)$ با تابع همبستگی $R_v(t + \tau, t) = N_0(t) \cdot \delta(\tau)$ تعریف می گردد که در آن $N_0(t)$ یک تابع حقیقی غیرمنفی است.

الف) با فرض اینکه داشته باشیم $X(t) \triangleq \int_0^t V(\alpha) d\alpha$, $t \geq 0$ ، تابع همبستگی $X(t)$ را بدست آورید.
 ب) با فرض اینکه $Y(t)$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ (در حالت کلی مختلط) و ورودی $v(t)$ باشد، تابع همبستگی فرایند Y و همبستگی های متقابل فرایند Y و V را بدست آورید.

۲- $X(t)$ یک فرایند نرمال با تابع متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau) = \frac{\sin^4(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2}$ می باشد.

الف) متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ این فرایند به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم می باشند و چرا؟
 ب) دو متغیر تصادفی $Y_1 = X(t) - X(t - 0.5)$ و $Y_2 = X(t) + X(t + 0.5)$ را در نظر بگیرید و تابع چگالی احتمال کناری و توأم آن دو را بدست آورید.

ج) تابع مشخصه توأم سه متغیر تصادفی $Z_1 = X(t - 0.25)$ و $Z_2 = X(t)$ و $Z_3 = X(t + 0.25)$ را پیدا کنید.

۳- گر $X(t)$ یک فرایند حقیقی ساکن به مفهوم وسیع، WSS، با متوسط صفر، $m_X = 0$ ، باشد، WSS بودن کدام یک از فرایندهای زیر را می توان نتیجه گرفت و چرا؟

الف) $Y_1(t) \triangleq e^{jt} X(t)$

ب) $Y_3(t) = e^{j(X(t)+A)}$ که در آن فرایند $X(t)$ نرمال است و $A \sim U(0, 2\pi)$ یک متغیر تصادفی مستقل از $X(t)$ است.

ج) $Y_4(t) = e^{jBX(t)}$ که در آن فرایند $X(t)$ نرمال است و B یک متغیر تصادفی گسسته مستقل از $X(t)$ و با جرم احتمالهای $\Pr\{B = 1\} = \Pr\{B = -1\} = 0.5$ می باشد.

۴- فضای نمونه ای شامل دو نقطه $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$ و با توزیع احتمال یکنواخت $P\{\xi_1\} = P\{\xi_2\} = 0.5$ در نظر بگیرید. در این فضا فرایند $X(t)$ را

$$X(t, \xi) = \begin{cases} \sin^2(t), & \xi = \xi_1 \\ \cos^2(t), & \xi = \xi_2 \end{cases}$$

بصورت زیر تعریف می کنیم:

الف) آیا این فرایند در متوسط ارگادیک است؟ چرا؟

ب) آیا این فرایند در تابع همبستگی ارگادیک است؟ چرا؟

۵- فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با تابع متوسط $m_X(t) = 0$ و تابع همبستگی $R_X(t + \tau, t) = e^{-t^2} \delta(\tau)$ می باشد.

الف) آیا این فرایند در متوسط ارگادیک است؟ چرا؟

ب) آیا این فرایند در تابع همبستگی ارگادیک است؟ چرا؟

۶- یک فرایند نرمال $X(t)$ با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau\right) 3^{-|\tau|}$ را در نظر بگیرید.

الف) ماتریس کواریانس بردار تصادفی $Y = (X(2), X(3), X(4))^T$ را بنویسید.