تمرین‌های فصل اول

۱− دستگاه معادلات زیر را حل و بحث نمایید.

الف)

$$\begin{cases} ۳x - y + z - t = ۱ \\ ۳x + y + z + t = ۰ \\ ٦x + ۲z = ۳ \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} x - y + z + t = ۱ \\ x + y - ۳z + ۲t = ۰ \\ ۴x - ۴z + ٦t = ۲ \\ x + ۲y + t = ۳ \end{cases}$$

۲− نشان دهید رابطه هم‌ارز سطری بودن در تعریف ۱−۴ بین ماتریس‌ها یک رابطه هم‌ارزی است.

۳− ثابت کنید هر زیرهیات از هیات اعداد مختلط شامل همه اعداد گویاست.

۴− ماتریس‌های زیر را ساده شده سطری نمایید.

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} i & -(۱+i) & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲i & -۱ \end{bmatrix}$$

۵– فرض کنید A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند بطوریکه $AB = I$ ثابت کنید $BA = I$.

۶– وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۷– ثابت کنید عمل سطری مقدماتی تعویض دو سطر را می‌توان با دنباله‌ای متناهی از دو عمل سطری مقدماتی دیگر نتیجه گرفت.

۸– فرض کنید A یک ماتریس ۱×۲ و B ماتریس ۲×۱ باشد. نشان دهید ماتریس $C = AB$ وارون‌پذیر نمی‌باشد.

۹–فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ وارون‌پذیر و B یک ماتریس ۳×۳ باشد بطوریکه $AB = ۰$ در اینصورت نشان دهید $B = ۰$.

۱۰– نشان دهید ماتریس
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix}$$
وارون‌پذیر است و معکوس آن دارای درایه‌های صحیح می‌باشد.

۱۱– ثابت کنید ماتریس ۴×۴ بالامثلثی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر همه درایه‌های روی قطر اصلی آن غیرصفر باشند.

تمرین‌های فصل دوم

۱– فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط باشد کدامیک از بردارهای $\mathbb{C}^3$ ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1 = (1, 0, -1)$ و $\alpha_2 = (0, 1, 1)$ و $\alpha_3 = (1, 0, 0)$ می‌باشد؟

۲– فرض کنید $\mathbb{R}$ هیات اعداد حقیقی باشد. روی $\mathbb{R}^2$ دو عمل بصورت

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \quad + \quad (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ c(x, y) \quad &= \quad (x, cy) \ \ \forall\, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. آیا $\mathbb{R}^2$ با این اعمال روی هیات $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است؟

۳– با فرضیات تمرین ۲ اگر اعمال را روی $\mathbb{R}^2$ بصورت

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \quad + \quad (x_2, y_2) &= (0, y_1 + y_2)\\ c(x, y) \quad &= \quad (0, cy) \ \ \forall\, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

تعریف کنیم آیا $\mathbb{R}^2$ با این اعمال روی هیات $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است؟

۴– کدامیک از مجموعه بردارهای زیر در $\mathbb{R}^4$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^4$ است؟

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = 0\}$$

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_4\}$$

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_3^2\}$$

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 x_2 = 0\}$$

۵– قضایای ۲–۱ و ۲–۲ را اثبات کنید.

۶– فرض کنید V فضای توابع حقیقی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ روی هیات $\mathbb{R}$ باشد کدامیک از زیرمجموعه‌های V در ذیل زیرفضایی از V است

$$\begin{aligned} W &= \{f \in V : f(x^{۳}) = (f(x))^{۳}\} \\ H &= \{f \in V : f(۱) = f(۰)\} \\ K &= \{f \in V : f(۰) = ۱\} \\ L &= \{f \in V : \text{پیوسته باشد } f\} \\ S &= \{f \in V : f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

۷– فرض کنید W فضای جواب‌های دستگاه همگن زیر باشد

$$\begin{cases} x_{۱} + x_{۴} = ۰ \\ x_{۲} - ۳x_{۳} - x_{۵} = ۰ \\ x_{۱} - ۲x_{۵} - x_{۴} = ۰ \end{cases}$$

یک پایه برای W بیابید.

۸– فرض کنید فضای V مجموعه اعداد حقیقی روی هیات اعداد حقیقی با جمع و ضرب معمولی و فضای W مجموعه اعداد حقیقی روی هیات اعداد گویا با جمع و ضرب معمولی باشند نشان دهید

الف) تنها زیرفضاهای V زیرفضای صفر و خود فضای V می‌باشد.

ب) W شامل تعداد نامتناهی زیرفضای غیربدیهی است.

ب) W شامل تعداد نامتناهی زیرفضای غیربدیهی است.

ج) چرا W را نمی‌توان به عنوان زیرفضایی از V در نظر گرفت؟

۹– زیرفضاهای W_1 و W_2 از $\mathbb{R}^4$ را به صورت زیر در نظر گیرید

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y\} \ , \ W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z + t\}$$

بعد زیرفضاهای W_1 و W_2 و $W_1 + W_2$ را بیابید.

۱۰– فرض کنید V فضای چندجمله‌ای‌های حقیقی با درجه کوچکتر یا مساوی سه باشد چندجمله‌ای‌های $p_1(x) = x + 1$ و $p_2(x) = 2x$ و $p_3(x) = x^2 - 1$ و $p_4(x) = x^2 + x + 1$ را بعنوان بردارهایی در V در نظر گیرید نشان دهید مجموعه $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ یک پایه برای V است. مختصات چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ را نسبت به این پایه بدست آورید.

۱۱– قضیه ۲–۷ را ثابت کنید.

تمرین‌های فصل سوم

۱– تبدیل خطی از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}^۲$ را مشخص نمایید بطوریکه $(۱,۰) = (۱,۱,-۱)T$ و $T(۱,۱,-۱) = (۱,۱)$ و $T(۱,۱,۱) = (۰,۱)$

۲– فرض کنید $T : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ تبدیل خطی باشد که توسط

$$T(x,y,z) = (x - y + ۲z, ۲x + y, -x - ۲y + ۲z)$$

تعریف شده است.

الف) $\ker T$ را مشخص نمایید. آیا T یک به یک است؟

ب) $ran\ T$ را مشخص نمایید. آیا T پوشاست؟

۳– فرض کنید T تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ باشد بطوریکه $ran\ T = \ker T$ در اینصورت ثابت کنید n بایستی عددی زوج باشد. تبدیل خطی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۲$ مثال بزنید بطوریکه $ran\ T = \ker T$.

۴– عملگر خطی T را روی $\mathbb{R}^۳$ بصورت $T(x,y,z) = (۳x, x - y, ۲x + y + z)$ در نظر گیرید آیا T معکوس‌پذیر است؟ در صورت معکوس‌پذیری $T^{-۱}$ را مشخص نمایید.

۵– فرض کنید U و T دو عملگر خطی روی $\mathbb{R}^۲$ باشند که بصورت زیر تعریف شده‌اند

$$T(x,y) = (y,x) \quad U(x,y) = (x,۰)$$

عملگرهای $U + T$ و UT و TU را مشخص نمایید.

۶– دو عملگر خطی S و T روی $\mathbb{R}^۲$ بیابید بطوریکه $ST = ۰$ ولی $TS \neq ۰$

۷– فرض کنید V مجموعه اعداد مختلط و $\mathbb{R}$ هیات اعداد حقیقی باشد. V روی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی فضایی برداری است. نشان دهید V یکریخت با $\mathbb{R}^{۲}$ می‌باشد.

۸– V و W دو فضای برداری متناهی‌البعد روی هیات $\mathbb{F}$ هستند در اینصورت شرط لازم و کافی برای اینکه V و W یکریخت باشند اینست که $\dim V = \dim W$.

۹– فرض کنید $T : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$ تبدیل خطی تعریف شده بصورت زیر باشد

$$T(x,y,z) = (x+y, ۲x-y)$$

?

ماتریس نمایش T را در پایه‌های $B = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ و $B' = \{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ بدست آورید که در آن

$$\alpha_۱ = (۱, ۰, ۰) \ , \ \alpha_۲ = (۱, ۱, ۰) \ , \ \alpha_۳ = (۱, ۱, ۱) \text{ و}$$

$$\gamma_۱ = (۱, ۲) \ , \ \gamma_۲(۲, ۱)$$

۱۰– نشان دهید به ازاء هر ماتریس $m \times n$، A رتبه سطری A با رتبه ستونی آن برابر است.

تمرین‌های فصل چهارم

۱− خواص (الف) تا (ه) مربوط به دترمینان مذکور در بخش ۴−۲ را اثبات نمایید.

۲− نشان دهید رابطه تشابه (تعریف ۴−۵) در بین ماتریس‌های مربعی یک رابطه هم‌ارزی است.

۳− خواص ضرب داخلی را در مورد مثال‌های ٦ تا ۸ تحقیق نمایید.

۴− نشان دهید هر زیرمجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر در فضای با ضرب داخلی مستقل خطی است.

۵− تصویر بردار $\alpha = (-۱, ۲, ۳)$ را بردار $\beta = (۲, ۰, -۱)$ بدست آورید همچنین زوایه بین این دو بردار را مشخص نمایید.

٦− مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -٦ & -٦ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & -٦ & -۴ \end{bmatrix}$$

را بدست آورید و نشان دهید A قطری‌شدنی است و با توجه به آن ماتریس $A^۵$ را مشخص نمایید.

۷− نشان دهید بردارهای β_i تعریف شده در قضیه ۴−۳ متعامد می‌باشند.

۸− نشان دهید ماتریس‌های مشابه چندجمله‌ای‌های مشخصه یکسانی دارند.

۹− فرض کنید A و B دو ماتریس ۳×۳ بر روی هیات $\mathbb{F}$ باشند ثابت کنید اگر $(I - AB)$ وارون‌پذیر باشد آنگاه $(I - BA)$ نیز وارون‌پذیر است.

۱۰− ماتریس ۲×۲، N را بطوریکه $N^۲ = ۰$ در نظر بگیرید. ثابت کنید مقادیر ویژه N همگی صفر می‌باشند.

تمرین‌های فصل پنجم

۱- دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{aligned}
-۲x_{۱} + x_{۲} \qquad\qquad &= -۱\\
x_{۱} - ۲x_{۲} + x_{۳} \qquad &= ۰\\
x_{۲} - x_{۳} + x_{۴} &= ۰\\
x_{۳} - ۲x_{۴} &= ۰
\end{aligned}$$

۲- دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{aligned}
۱/۷x_{۱} + ۲/۳x_{۲} - ۱/۵x_{۳} &= ۲/۳۵\\
۱/۱x_{۱} + ۱/۶x_{۲} - ۱/۹x_{۳} &= -۰/۹۴\\
۲/۷x_{۱} - ۲/۲x_{۲} + ۱/۵x_{۳} &= ۲/۷۰
\end{aligned}$$

۳- دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس ژردن حل کنید.

$$\begin{aligned}
۳x_{۱} + ۱۶x_{۲} + ۷x_{۳} &= ۹\\
-۴x_{۱} - ۱۰x_{۲} + ۵x_{۳} &= -۸\\
-۸x_{۱} - ۴x_{۲} - ۱۷x_{۳} &= -۳
\end{aligned}$$

۴- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
۱/۰۱۲x_{۱} - ۲/۱۳۲x_{۲} + ۳/۱۰۴x_{۳} &= ۱/۹۸۴\\
-۲/۱۳۲x_{۱} + ۴/۰۹۶x_{۲} - ۷/۰۱۳x_{۳} &= -۵/۰۴۹\\
۳/۱۰۴x_{۱} - ۷/۰۱۳x_{۲} + ۰/۰۱۴x_{۳} &= -۳/۸۹۵
\end{aligned}$$

مطلوب است حل دستگاه بالا به روش حذفی گاوس

الف) بدون محورگیری

ب) با محورگیری جزئی

ج) با محورگیری جزئی مقیاس شده

۵– دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس محاسبه نمائید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ \\ ۱ & ۲ & ۵ \\ ۹ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۶– ماتریس زیر رابا استفاده از تجزیه دو لتیل به حاصلضرب LU تجزیه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۱ \\ -۲ & -۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

۷– ماتریس تمرین ۶ را با استفاده از تجزیه کروت به حاصلضرب LU تجزیه کنید.

۸– با استفاده از تمرین ۶ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} ۴x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ &= -۲ \\ -۲x_۱ - ۴x_۲ + ۵x_۳ &= ۲۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۶x_۳ &= ۷ \end{aligned}$$

۹– با استفاده از تمرین ۷ دستگاه معادلات تمرین ۸ را حل کنید.

۱۰– نشان دهید ماتریس زیر معین مثبت است و با استفاده از روش چولسکی آن را به حاصلضرب LL^t تجزیه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱۱– وارون ماتریس زیر را

الف) بااستفاده از روش حذفی گاوس

ب) بااستفاده از روش تجزیه LU بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۶ \\ ۱ & ۵ & ۸ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۲– نشان دهید که اگر X_t جواب واقعی و X_e جواب محاسبه شده دستگاه $AX = b$ و $C(A)$ عدد شرطی ماتریس A باشد آنگاه

$$\frac{\|r\|}{C(A)\|b\|} \leq \frac{\|X_t - X_e\|}{\|X_t\|} \leq C(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

۱۳– برای دستگاه معادلات زیر یک جواب به روش حذفی گاوس بدست آورید و سپس تلاش کنید به روش تصحیح باقیمانده جواب را بهبود بخشید.

$$\begin{aligned} ۱/۳۳x_۱ + ۴/۲۸x_۲ - ۱/۵۸x_۳ &= ۹/۱۱ \\ ۳/۲۵x_۱ + ۵/۵۱x_۲ - ۷/۸۸x_۳ &= ۳/۷۱ \\ ۷/۱۸x_۱ + ۴/۱۹x_۲ - ۱/۴۵x_۳ &= ۵/۱۶ \end{aligned}$$

۱۴– نشان دهید دستگاه معادلات زیر بد وضع است.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ &= ۳ \\ ۱/۰۰۰۱x_۱ + ۲x_۲ &= ۳/۰۰۰۱ \end{aligned}$$

۱۵– عدد شرطی ماتریس زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۶ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۶– دستگاه معادلات زیر را به روش ژاکوبی حل کنید. (محاسبات را تا ۴ رقم اعشار انجام دهید).

$$۱۰x_۱ + x_۲ + ۸x_۳ = ۱۶$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 16 \\
2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 51
\end{aligned}
$$

۱۷– دستگاه معادلات زیر را به روش‌های ژاکوبی و گاوس–سایدل با تقریب اولیه $X^{(0)} = (0, 0, 0)'$ حل کنید و سرعت همگرایی هر دو روش را مقایسه نمایید.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 6 \\
x_1 - 4x_2 + x_3 &= 4 \\
-x_1 + 2x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

۱۸– نشان دهید برای دستگاه معادلات زیر با ترتیب داده شده

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\
2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 8 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

روش گاوس–سایدل همگرا و روش ژاکوبی واگرا است.

۱۹– دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 10 \\
8x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\
4x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 23
\end{aligned}
$$

ترتیب معادلات را به گونه‌ای تعویض کنید که روش‌های ژاکوبی و گاوس–سایدل برای دستگاه فوق همگرا باشند.

۲۰– دستگاه معادلات زیر را نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
px_1 + x_2 &= 1 \\
x_1 + px_2 + x_3 &= 2 \\
x_2 + px_3 &= 3
\end{aligned}
$$

نشان دهید که روش‌های ژاکوبی و گاوس − سایدل در صورتی همگرا هستند که $|p| > \sqrt{2}$.

۲۱− نشان دهید که روش ژاکوبی برای دستگاه معادلات زیر(که در آن $a \neq 0$) فقط در صورتی همگراست که $a > \frac{5}{9}$.

$$\begin{aligned} 6ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 3ax_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 2ax_3 &= 3 \end{aligned}$$

۲۲− اگر A یک ماتریس اکیداً قطر غالب باشد نشان دهید $\|B_J\|_\infty < 1$ که در آن B_J ماتریس ژاکوبی در رابطه $X = BX + C$ است.

۲۳− دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} 0/4x_1 + 0/1x_2 + 0/2x_3 &= 1/2 \\ 0/1x_1 + 0/5x_2 + 0/1x_3 &= 1/4 \\ 0/2x_1 + 0/1x_2 + 0/4x_3 &= 1/6 \end{aligned}$$

الف) دستگاه بالا را به روش گاوس−سایدل حل کنید.

ب) دستگاه فوق را به روش SOR با $w = 2/25$ حل نمایید.

ج) نتایج بدست آمده در الف و ب را مقایسه کنید.

$$\lambda_1 = ۱۲/۱۲۲۹ \quad , \quad \lambda_2 = -۵/۷۳۴۵ \quad , \quad \lambda_3 = -۰/۳۸۴$$

تمرین‌های فصل ششم

۱ – با توجه به روند اثبات قضیه گرشگورین نشان دهید که $\rho(A) \leq \min(\|A\|_1, \|A\|_\infty)$.

۲ – دوایر قضیه گرشگورین را برای ماتریس زیر رسم کنید و از آنجا کران بالا و پایینی برای مقادیر ویژه A بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱۱ & ۳ & ۹ & ۰ \\ ۶ & -۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۸ & -۶ & ۳ \\ ۷ & -۱۲ & ۸ & ۲ \end{bmatrix}$$

۳ – چندجمله‌ای مشخصه ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

را به روش‌های کریلف و لوریر محاسبه کنید.

۴ – مقدار ویژه غالب ماتریس زیر را به روش توانی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵ – کوچکترین مقدار ویژه ماتریس تمرین ۴ از نظر قدرمطلق را به روش معکوس توانی محاسبه کنید.

۶ – نشان دهید که روش توانی را برای حالتی که مقدار ویژه غالب حقیقی و تکراری باشد نیز می‌توان بکاربرد.

۷ – بدون محاسبه A^{-1} کوچکترین مقدار ویژه ماتریس زیر از نظر قدرمطلق را به روش معکوس توانی محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

۸ – مقدار ویژه غالب ماتریس تمرین ۴ را با استفاده از ماتریس $A^۲$ محاسبه کنید.

۹− بزرگترین مقدار ویژه مختلط ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & 3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۰− نزدیکترین مقدار ویژه ماتریس زیر را به عدد ۱۴ محاسبه کنید. (راهنمایی: کوچکترین مقدارویژه ماتریس $B = A - 14I$ از نظر قدرمطلق را بدست آورید و سپس مقدارویژه ماتریس A را محاسبه کنید)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & -9 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

با استفاده از تمرین ۴ و روش تقلیل، دومین مقدار ویژه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۱− ماتریس B را در روش تقلیل بخاطر آورید. نشان دهید که

الف) مقادیرویژه ماتریس B عبارتند از $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

ب) سطر kام ماتریس B صفر است.

ج) با حذف سطر kام و ستون kام ماتریس B ماتریس C با مقادیرویژه $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ حاصل خواهد شد.

۱۲ – اگر λ_1 و $\bar{\lambda}_1$ ریشه‌های مختلط معادله درجه دوم $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ بوده و مقادیرویژه غالب ماتریس A نیز باشند، نشان دهید که با انتخاب بردار دلخواه $0 \neq Y^{(0)}$ و معرفی $Y^{(k)} = A^k Y^{(0)}$، برای k به اندازه کافی بزرگ داریم

$$Y^{(k+2)} + aY^{(k+1)} + bY^{(k)} \simeq 0$$

۱۳ – با استفاده از تبدیلات ژاکوبی ماتریس زیر را یک ماتریس قطری تبدیل کنید و مقادیر ویژه آن را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

۱۴ – با استفاده از تبدیلات هاوس هولدر ماتریس متقارن زیر را به یک ماتریس سه

قطری تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۵ – چندجمله‌ای مشخصه ماتریس سه قطری متقارن زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

۱۶ – نشان دهید که ماتریس P در روش هاوس هولدر متعامد و متقارن است.

۱۷ – با استفاده از تبدیلات هاوس هلدر ماتریس زیر را به یک ماتریس پایین هسنبرگی تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & -3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۸ – چندجمله‌ای مشخصه ماتریس پایین هسنبرگی زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 8 & 21 \\ 2 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹ – با استفاده از روش QR مقادیر ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$