طراحی الگوریتم

جلسه اول   ۲۷ / ٦ / ۱۴۰۰

طراحی الگوریتم هنر حل مسئله است.

درک مسئله
abstraction

راه حل قدم به قدم

مسئله → ساده سازی (4) → طراحی الگوریتم (3) → انتخاب ساختمان داده (2) → برنامه نویسی (1) → خروجی

ساده سازی: یعنی داده های غیر ضروری را حذف کنیم
(دوست داریم به بیان ریاضی وار برسیم)

آیا خروجی به دست آمده مطلوب است؟
" حافظه استفاده شده " " ؟
" زمان صرف شده " " ؟

* اگر خروجی مطلوب نبود باید مرحله به مرحله به عقب برگردیم:
مثلاً برنامه نویسی آن اشتباه بوده است (1) یا ساختمان داده آن را اشتباه انتخاب کرده ام (2) یا الگوریتم نامناسب نوشته ام (3) و از همه بدتر شاید درک اشتباهی از مسئله داشتیم (4) ⇐ به این مراحل feedback یا بازخورد می گویند)

مثال 1: مرتب سازی یک آرایه عددی n تایی:
چون ساده سازی خاصی ندارد از ساده سازی آن عبور می کنیم و مرحله طراحی الگوریتم را بررسی می کنیم.

طراحی الگوریتم:

1. مرتب سازی درجی (Insertion sort): هر آرایه را که می خواهد درج کند با آرایه های قبلی چک می کند و جای مناسب آن را درج می کند. ⇐ $O(n^2)$ (آرایه)

2. مرتب سازی انتخابی (selection sort): هر دفعه بزرگترین یا کوچکترین را انتخاب و در جای خود قرار می دهیم. $\Leftarrow O(n^2)$ (دآرایه)

3. مرتب سازی حبابی (Bubble sort): عملکرد این مثل حباب است هر دفعه عددی که کوچکتر است بالا می آورد و به سر آرایه نزدیک می کند. $\Leftarrow O(n^2)$ (دآرایه)

4. مرتب سازی ادغامی (merge sort): که بازگشتی که آرایه را از وسط نصف می کند، هر دو نصف را مرتب می کند و در ادامه ادغام می کند. $\Leftarrow O(n \log n)$ (دآرایه)

5. مرتب سازی هرمی (Heap - sort): از آرایه ورودی، هرم می سازیم، و سر هرم یا کوچکترین است یا بزرگترین. اگر کوچکترین بود مثلا سر هرم را برمی داریم و ادامه آرایه را هرم می کنیم و دوباره سر هرم که کوچکترین است برمی داریم و به همین روش تا آخر ادامه می دهیم. $\Leftarrow O(n \log n$ (درختان داده هیپ)

6. مرتب سازی سریع (quick - sort): عددی را انتخاب می کنیم، جوری آرایه را می شکنیم که اعداد سمت چپ آرایه از محل شکستن کوچکتر از آرایه باشند (به صورت بازگشتی مرتب می کنیم) سمت راست آرایه را اینبار بزرگتر از محل شکستن مرتب می کنیم و در ادامه نیاز به ادغام ندارد (تفاوت این روش با روش ادغامی همین است). $\Leftarrow O(n \log n)$ (دآرایه)

7. مرتب سازی شمارشی (count - sort): باید اعداد در محدوده ی خاصی باشند و در حالت کلی نمی توان از این روش استفاده کرد و با شرط هایی که روی اعداد بود از این روش می توانستیم استفاده کنیم. (دآرایه)

طیان

* فقط در مرتب سازی هرمی به ساختمان داده هرم نیاز داریم بقیه مرتب سازی ها با یک آرایه حل می شوند.

* در مرتب سازی ادغامی شاید به آرایه اضافی نیاز پیدا کنیم (البته به اینکه چجوری کد بزنیم.)
در قسمت ادغام کردن آن

* مرتب سازی شمارشی حتماً حافظه اضافه می خواهد. (درسته با آرایه حل می شود ولی حتماً حافظه اضافه می خواهد.)

* هرمی بسته به نوع پیاده سازی امکان دارد حافظه اضافه بخواهد.

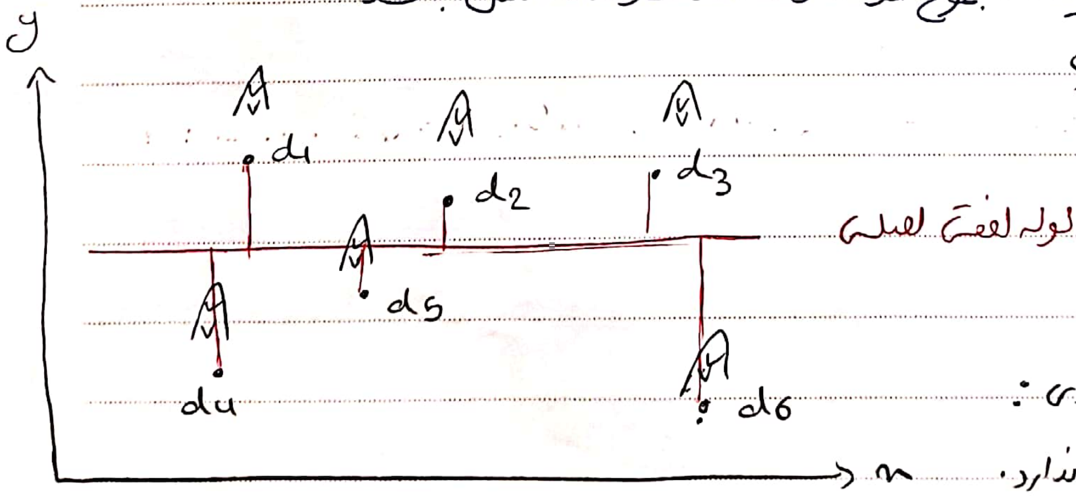
خروجی مطلوب چیست؟

1 آرایه مرتب شده باشد 2 زمان مناسب را استفاده کند.

3 حافظه بهینه مصرف کند

مثال 2: n تا چاه نفتی داریم. یک لوله می خواهیم برای انتقال نفت ها. مکان لوله افقی را جوری تنظیم کنید که مجموع طول لوله های عمودی حداقل باشد.

y مکان لوله نفتی؟



در این ساده سازی:
مختصات x کاربرد ندارد.

پس تعدادی y داریم (از چاه ها نفتی) ← ورودی هستند خروجی ← y مکان لوله نفتی

طراحی الگوریتم :

1- مرتب کنیم و وسط اعداد را پیدا کنیم. $O(n\log n)$

2- پیدا کردن میانه (نیاز نیست مرتب کنیم). $O(n)$

تعداد دکل‌ها زوج باشد باید تعداد دکل‌های پایین و بالایی باشد (وسط آن را پیدا می‌کنیم) اگر تعداد دکل ها فرد باشد از دکل وسط آن باید عبور کند.

طایان

جلسه دهم ۱۴۰۰ / ۶ / ۳۱

روش های طراحی الگوریتم:

روش استقرا Induction :

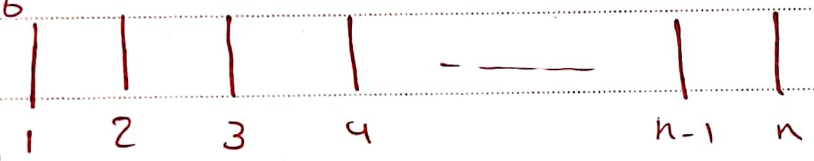
روشی است شبیه دومینو / حکم استقرا ← مسئله به ازای مقدار n ام درست باشد.

در دومینو یک سری ستون ما شده داریم. (شرط اینکه ستون n ام بیفتد چی است؟

۱ـ افتادن موفق ستون ۱ ام ⟸ پایه استقرا

۲ـ فاصله بین ستون ها مناسب باشد (ستون i ام، ستون $i+1$ ام را بیندازد.)

گام استقرا



اثبات سست

برای اثبات حکم استقرا اول نشان می دهیم پایه استقرا درست است (امکان پذیر باشد [illegible]) و سپس گام استقرا را ثابت می کنیم.

فرض استقرا: ۱ـ استقرای ضعیف: فرض می کنیم مسئله برای $n-1$ درست است

۲ـ استقرای قوی: فرض می کنیم مسئله برای همه ی $a<k<n-1$ درست است.

حدس استقرا: همان مسئله است.

به دو صورت بیان می شود مثلاً هم می گویند نشان دهید مقدار رابطه فلان است؟

یا مقدار رابطه را بدست آورید.

مثال 1: ثابت کنید n^2-1 به ازای nها فرد بر 8 تقسیم پذیر است.

پایه: $n=3 \to 3^2-1=8 \mod 8=0$ ✓

فرض: $n=\underset{\text{فرد}}{K} \to K^2-1 \mod 8=0$

حکم؟ $n=K+2 \to (K+2)^2-1 \mod 8=0$

چون K فرد بوده و در صورت سوال عدد فرد می‌خواسته پس 2+ می‌کنیم که عدد فرد به دست بیاید.

طبق فرض درست است پس کنار می‌گذاریم این دو تا جمله را

$$(K+2)^2-1=(K^2+4K+4-1) \mod 8=?$$

$$=(4K+4) \mod 8 = 4(\underset{\text{فرد}}{K}+1) \mod 8$$

چون زوجه اینطوری در نظر می‌گیریم → زوجه $=2m$

$4(2m) \mod 8 = 8m \mod 8 = 0$ ✓ ثابت شد

مثال 2: هرمی از اعداد فرد داریم، مجموع اعداد در هر سطر هستم،

① 1 یکمین عدد فرد → دوتا در سطر دوم، در سطر اول → $1=1^3$

3 سومین عدد فرد (1+2) 5 → $8=2^3$ حدس: $(\text{شماره سطر})^3$

② 7 9 11 (1+2+3) → $27=3^3$

③ 13 15 17 19 (1+2+3+4، 10امین عدد فرد) → $64=4^3$

* هر سطر به تعداد شماره سطر عدد دارد، پس سطر kام k تا عدد دارد.

پایه استقرا: $n=1 \to 1^3=1$ ✓

فرض استقرا (سطر kام): چون اعداد فرد هستند → +2

$a_1 \xrightarrow{+2} a_2 \xrightarrow{+2} a_3 \;---\; a_{k-1} \xrightarrow{+2} a_k \qquad \sum_{r=1}^{k} a_r = k^3$

حکم استقرا: $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \;---\; b_{k-1} \quad b_k \quad b_{k+1}$ ؟ $\sum_{r=1}^{k+1} b_r = (k+1)^3$

جدید ★ (+2) — از اعضای جدید

$$\left.\begin{aligned} b_1 - a_1 &= 2k \\ b_2 - a_2 &= 2k \\ &\vdots \\ b_k - a_k &= 2k \end{aligned}\right\} + \longrightarrow \sum_{r=1}^{k} b_r - \underbrace{\sum_{r=1}^{k} a_r}_{k^3 :\ \text{جانشینی فرض}} = k(2k) = 2k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{k} b_r = k^3 + 2k^2 \quad ①$$

$\sum_{i=1}^{k+1} i$ شماره عدد فرد (عدد آخر ستون $k+1$ ام)

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \xrightarrow[\boxed{a_i = 2i-1 \text{ ام}}]{\text{مقدار}} \times 2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{\cancel{2}} - 1 = k^2 + 3k + 1 \quad ②$$

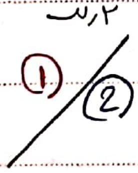
$$① + ② = \sum_{r=1}^{k+1} b_r = (k+1)^3$$

مثال 3: n خط راست دلخواه در صفحه داریم می‌خواهیم نواحی بین خطوط را جوری رنگ کنیم که نواحی مجاور همرنگ نباشند؛ حداقل چند رنگ مورد نیاز است؟

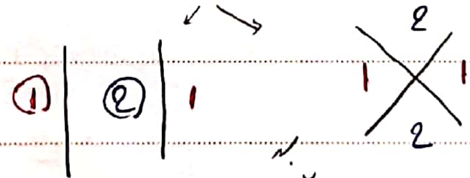
یال مشترک داشته باشند.

۲ رنگ

$n=1$



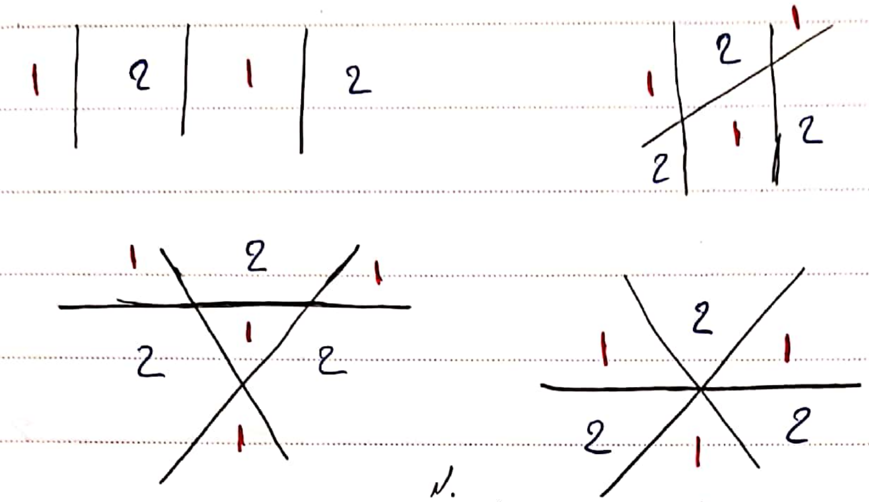
$n=2$



۲ رنگ

ادامه صفحه بعد

$n = 3$

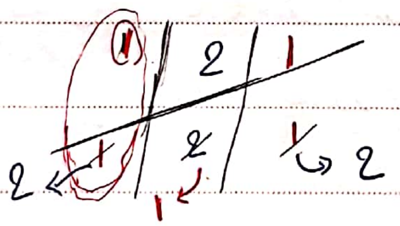


۲ رنگ

حداقل ۲ رنگ کافی است : حکم استقرا

پایه استقرا $n = 1$ (صفحه قبل نشان دادیم)

فرض استقرا : فرض می‌کنیم نواحی بین $n-1$ خط می‌توان با دو رنگ، رنگ کرد



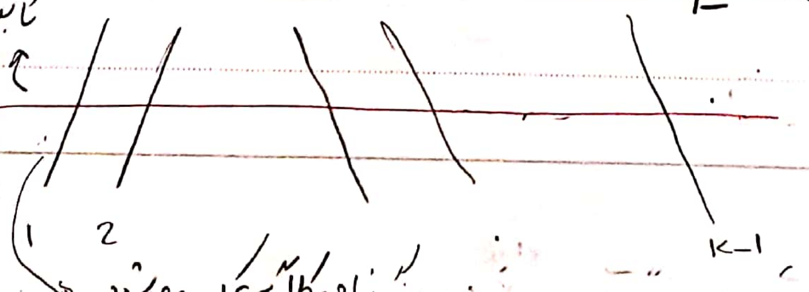
* دو تا خط داشته باشیم با این رنگ‌ها خط سوم آن‌ها را قطع کند

حکم استقرا: با رسم خط n ام نواحی یک طرف خط را ثابت نگه می‌داریم و طرف دیگر خط رنگ کل نواحی را برعکس می‌کنیم.

ثابت نگه می‌داریم

خط kام

از داخل تک تک از نواحی قبلی رد شده است



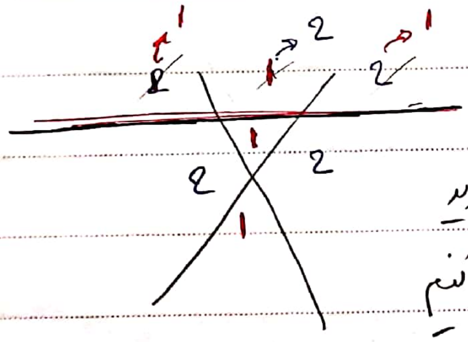
رنگ نواحی کلاً برعکس می‌شود

پایان

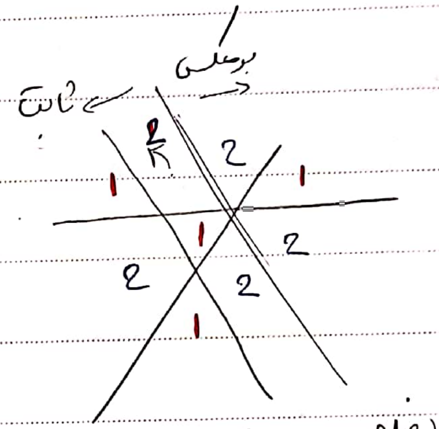
رنگ نواحی پایین کاملاً برعکس شده ← ناحیه‌ها مجاور رنگ متفاوت دارند

← نصف ناحیه بالای خط درست، نصف ناحیه پایین خط است ← رنگ ناحیه پایین را عوض کردیم

← دو ناحیه مجاور همرنگ نیستند



یک خط جدید اضافه کنیم

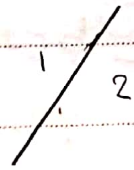


(قلم)

مثال ۴: n تا خط دو به دو ناموازی در صفحه داریم، هیچ سه خطی از یک نقطه نمی‌گذرند

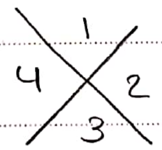
چند ناحیه بین خطوط به وجود می‌آید؟

$n = 1$



$T(1) = 2$

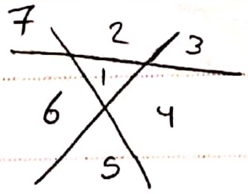
$n = 2$



$T(2) = 4$

$+2$

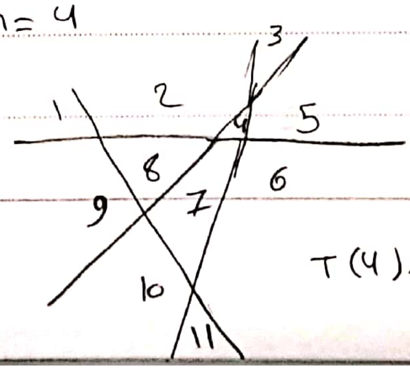
$n = 3$



$T(3) = 7$

$+3$

$n = 4$



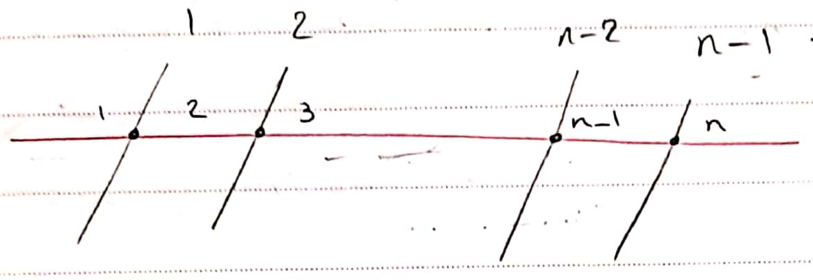
$T(4) = 11$

$+4$

ادامه در بعد

هر خط که بکشیم به اندازه عدد آن به ناحیه‌ها قبلی اضافه می‌کند.

ناحیه $T(n-1) \rightarrow n-1$



خط n ام (هر n-1 خط قبلی را باید قطع کند)

n-1 نقطه تلاقی

n-1 نقطه تلاقی ← n تا تکه ← هر تکه از خط یکی از نواحی قبلی را به دو ناحیه تبدیل کرده ← n ناحیه نصف شده و تبدیل به 2n تا ناحیه شده (n تا ناحیه اضافه شده)

رابطه

$$T(n)=T(n-1)+n \Rightarrow T(n)=n+(n-1)+(n-2)+\dots+2+\underset{2}{\cancel{T(1)}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i + 1 = \frac{n(n+1)}{2}+1$$

چون عدد اول از ۲ شروع شده و از 1 شروع شده است.

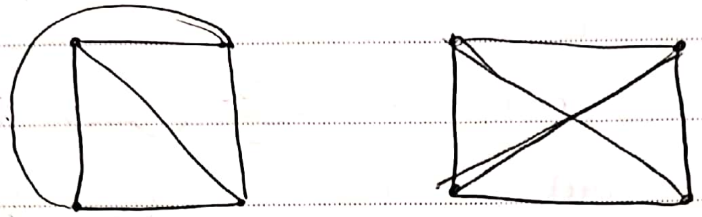
اگر به جای خط، زاویه داشتیم:

تفاوت خط با زاویه   خط   X   4 تا ناحیه

زاویه   ① < ②   2 تا ناحیه

مثال 5: فرمول اویلر در گراف‌ها مسطح و همبند.

گرافی که بتوان جوری کشید که یال‌های آن همدیگر را قطع نکنند



مسطح هست ← ... → مسطح نیست

$4 = $ راس $\quad 6 = $ یال $\quad 4 = $ ناحیه $\quad \Rightarrow 4+4=6+2$

فرمول اویلر

$V + F = E + 2$

راس، نواحی، یال

استقرا روی کدام؟ (یال؟ نواحی؟ راس)

روی همه تست می‌کنیم

استقرا روی راس‌ها: گراف $n-1$ راس / گراف n راس

چند تا یال اختلاف دارند؟

* روی تعداد راس که نمی‌توان استقرا زد چون یک راس اضافه کنیم نمی‌دانیم چند یال اضافه شده. یا ناحیه

استقرا روی یال‌ها: گراف $n-1$ یال / " n یال

* روی تعداد یال‌ها نیز نمی‌توانیم استقرا زد دقیقاً مثل راس‌ها

استقرا روی تعداد نواحی: $n=1$ گرافی با یک ناحیه ← گراف بدون دور ← درخت

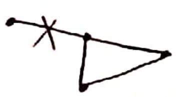
$\to V = E+1 \Rightarrow V+1 = E+2 \to (E+1)+1 = E+2$ ✓ رابطه اویلر برقرار

فرض: گرافی که $n-1$ ناحیه دارد برقرار است. قرار دادن در ناحیه

حکم: گرافی داریم با n ناحیه چیکار کنیم بشه گرافی با $n-1$ ناحیه

یک یال از دور کم می‌کنیم (که در گراف تغییری به وجود نیاید) راس‌ها ثابت یال‌ها تغییر

۱) به دو طرف رابطه اضافه می‌کنیم. (از چپ یک ناحیه کم کردیم از سمت راست یک یال کم کرده بودیم) چون



جلسه سوم

۱۴۰۰ / ۷ / ۳

روش‌های طراحی الگوریتم:

استقرا: ۱. استقرای ضعیف:

فرض ✓ $P(K) \longrightarrow P(K+1)$ حکم؟

۲. استقرای قوی:

$P(a), P(a+1), \dots, P(K) \longrightarrow P(K+1)$

فرض ✓ حکم؟

استقرای قوی:

مثال ۱: ثابت کنید $a_n = 2^n$ است.

$a_0 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 + 1$

$a_0 = 1 = 2^0$

$a_1 = 2 = 2^1$

$a_2 = 4 = 2^2$

$a_3 = 8 = 2^3$

$a_4 = 16 = 2^4$

پایه: $a_0 = 1 = 2^0$ ✓

فرض: $\forall\, 0 \leq K < n \rightsquigarrow a_K = 2^K$

حکم: $n \rightsquigarrow a_n = 2^n$?

* فرمول تصاعد هندسی:
$$\sum_{K=0}^{n} r^K = \frac{r^{n+1} - r^0}{r-1}$$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 + 1$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0 + 1$ (تصاعد هندسی)

$= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 1 = \frac{2^{n+1-1} - \cancel{1}}{2 - \cancel{1}} + \cancel{1} = 2^n$

طایان

مثال 2: ثابت کنید $n \geq 2$ (n صحیح)، عدد n یا خودش اول است و یا می‌توان آن را به صورت ضرب تعدادی عدد اول (لزوماً متمایز نیستند) نمایش داد.

مثال

$n=2$ ✓

$n=3$ ✓

$n=4=2\times2$

$n=5$ ✓

$n=6=2\times3$

$\vdots$

پایه: $n=2$ عدد اول ✓

فرض: $2 \leq k < n$ یا خودش اول است یا ...

حکم: n " " " "

n → عدد اول است ✓

n → عدد اول نیست → $n = \underbrace{a * b}$ مقسوم علیه‌ها عدد n

$2 \leq a, b < n$

طبق فرض اینجور اعداد یا خودشان اول هستند یا به صورت اعداد اول قابل نمایش‌اند.

$n = \underset{\text{تعدادی عدد اول}}{a} * \underset{\text{تعدادی عدد اول}}{b} \Rightarrow$ n ضرب تعدادی عدد اول است.

مثال 3:

اداره پست که در آن تمبرهای 4 و 5 تومنی موجود است. ثابت کنید برای هر $n \geq 12$، هزینه پست با ترکیب تعدادی از تمبرهای 4 و 5 تومنی قابل تأمین است.

مدلسازی: هر عدد $n \geq 12$ باشد، به صورت مجموع اعداد 4 و 5 قابل نوشتن است.

پایه: $n=12 = 4+4+4$ ✓

طایان

فرض: $12 \le K < n \to K=$ مجموع تعدادی از ۴ و ۵ ها

حکم: n?

$n-4<n \longrightarrow$ طبق فرض به صورت تعدادی ۴ و ۵ قابل نوشتن است. $(n-4)$

① $n=(n-4)+4$

② $n=(n-5)+5$ ← و یک عدد ۴ تو همه به آن اضافه می‌کنیم

← این هم مثل بالا

* اگر از ① استفاده کنیم اولویت ما با عدد ۴ تومن است و در ② اولویت با عدد ۵ تومن است.

فرض بالا اشتباه است چون مسئله با یک پایه حل نمی‌شود به دلیل زیر:

۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ را به صورت جمع اعداد قبل از آن نمی‌توان نوشت چون از یک جایی به زیر ۱۲ که پایه اصلی است می‌رسیم و باید بنشینیم چکار کنیم پس تا ۱۵ جز پایه می‌گیریم:

پایه:

$n=12: 4+4+4$ ✓

$n=13: 4+4+5$ ✓

$n=14: 4+5+5$ ✓

$n=15: 5+5+5$ ✓

n های بالای 16 با این اثبات بالا درست است.

$n=12$ تا 15 را باید جدا اثبات کرد.

$n \geq 16 \to$ اثبات بالای صفحه برقرار است.

چرا استقرای قوی است؟ چون از $n-4$ یا $n-5$ استفاده می‌شود.

خطاهای معمول در اثبات با استقرا:

۱- ثابت کنید $n=\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}}$

پایه: $n=1 \quad 1=\sqrt{1+(1-1)\sqrt{\cdots}}=\sqrt{1}=1$ ✓

فرض: $1 \le k \le n$ درست است

حکم: $n+1=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}$?

برای n درست است $n \xrightarrow[\text{به توان 2}]{\text{دو طرف رابطه}}$ $n^2 = 1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}$

$\underbrace{n^2-1}_{} = (n-1)\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}$

تجزیه $(n+1)(\cancel{n-1}) = (\cancel{n-1})\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}$

$\boxed{(n+1) = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{\cdots}}}}$ ✓ به نظر میاد حکم ثابت شد.

ما دو طرف را به $n-1$ تقسیم کردیم $\Rightarrow$ $n=1 \to n-1=0$ (تقسیم بر صفر) اشتباه است.

اگر $n=1$ را کنار بگذاریم هم از پایه‌ها بالاتر نمی‌توانیم اثبات کنیم چون بی‌نهایت رادیکال دارد و قابل محاسبه نیست.

در اثبات $n \neq 1$ فرض کردیم (... فیلم)

اگر پایه را صفر در نظر بگیریم پایه درست می‌شه ولی باز از 1 به 2 نمی‌رسیم و اثبات نمی‌شود.

2- n تا خط دو به دو ناموازی در صفحه داریم. ثابت کنید هر n خط یک نقطه تلاقی مشترک دارند.

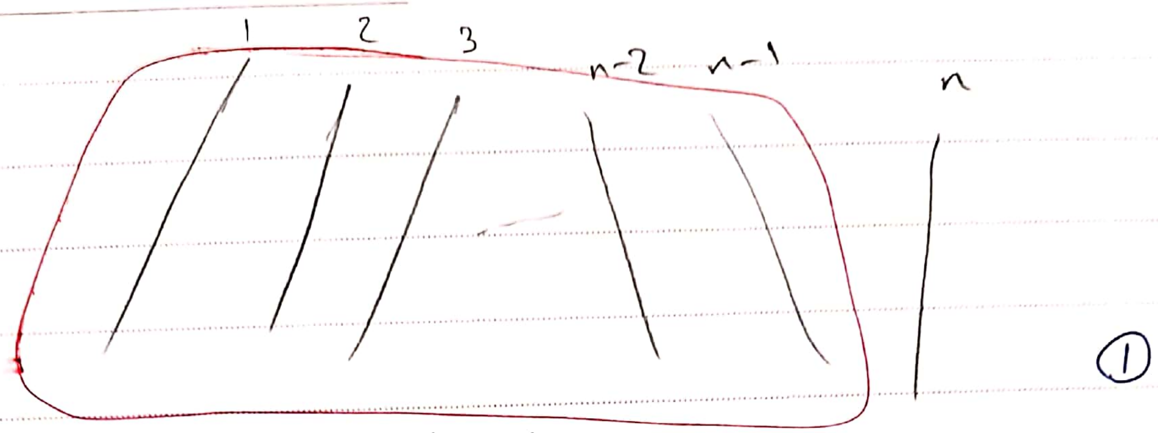
پایه: $n=1$ ✗ نقطه تلاقی ندارد

$n=2$ ✓

فرض: اگر $n-1$ خط دو به دو ناموازی داشتیم یک نقطه تلاقی مشترک دارد

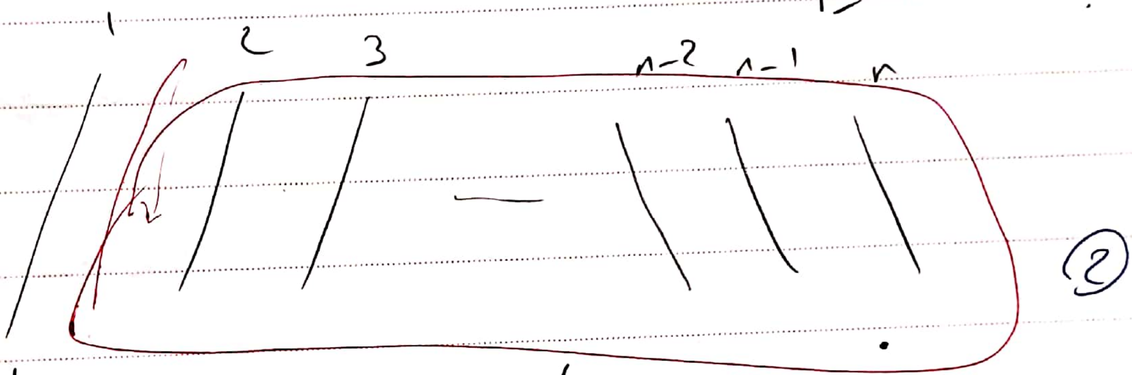
حکم: اگر n ...

طایان



طبق فرض همه یک نقطه تلاقی مشترک دارند

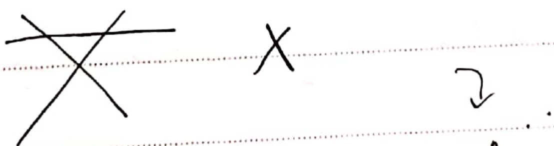
برعکس عمل می‌کنیم



طبق فرض همه یک نقطه تلاقی مشترک دارند (چون برای $n-1$ بود فرض)

① و ② : $n-2$ خط مشترک و یک نقطه تلاقی مشترک ⇐ هر n خط نقطه تلاقی مشترک دارند.
چون بین آن‌ها مشترک است.

پایه = 3 → اشتباه



ما $n=2$ را به عنوان پایه در نظر گرفتیم اشتباه است چون بعدی آن اثبات نمی‌شود.

اشکال اثبات:
به ازای $n=2$ اگر $n-2$ تا خط مشترک در نظر گرفتیم اگر $n=2$ بگذاریم خط مشترک نداریم
اگر $n=3$ بگذاریم یک خط مشترک داریم (نقطه تلاقی نداریم برای یک خط)
یک حالت خاص در اثبات اشتباه بود

جلسه چهارم

۷ / ۷ / ۱۴۰۰

مثال ۱: محاسبهٔ مقدار یک چند جمله ای درجه n (x مجهول)

$$P_n(x) = a_n x^n \underbrace{+ a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

چندتا جمع؟ چندتا ضرب؟ ضرب $T(n-1)$ (فرض)

n+1 جمله ⇐ بین هر دو جمله یک جمع ⇐ تعداد جمع ها n

روش اول: تعداد ضرب؟

a_0	0
$a_1 x$	1
$a_2 x^2$	2
⋮	⋮
$a_{n-1} x^{n-1}$	$n-1$
$a_n x^n$	n

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

تصاعد حسابی — فرمول تصاعد حسابی

پایه استقرا ① $P_1(x)$ ضرب

فرض استقرا: فرض می کنیم برای محاسبهٔ چند جمله ای درجه n-1 به $T(n-1)$ ضرب نیاز داریم.

حکم استقرا (درجه n) — رابطه بازگشتی — برای جملهٔ n ام

$$T(n) = T(n-1) + n$$
$$= T(n-2) + (n-1) + n$$
$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$
$$\vdots$$
$$= \sum i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

n^2 تا ضرب خیلی زیاد است و راه حل خوبی نیست.

روش دوم:

تعداد ضرب

x 0 $\rightarrow a_1 x$ ① ضرب

x^2 1 $\rightarrow a_2 x^2$ " ②

$x^3 = x^2 x$ 1 $\rightarrow a_3 x^3$ " ②

$x^4 = x^3 x$ 1

$\vdots$ $\vdots$

$x^n = x^{n-1} x$ 1 $\rightarrow a_n x^n$ ② ضرب

از قبل حساب شده

چون x^2 را قبلاً حساب کردیم.

برای x^n یک ضرب a_n هم در آن ضرب می شود $\Leftarrow$ 2 ضرب

تعداد ضرب های جمله n ام   تعداد ضرب برای جمله قبل

$$T(n) = T(n-1) + 2 = 2(n-1) + 1$$

$$= \underbrace{2n-1}_{\text{ضرب}} = O(n)$$

تعداد ضرب مورد نیاز برای محاسبه چند جمله ای درجه $n-1$

از جمله دوم تا n ام $\Leftarrow$ $n-1$ جمله که هر کدام 2 تا ضرب می خواهند

$\Downarrow$ $2(n-1)$ ضرب

جمع T_n $2n-1$ ضرب

روش هورنر (Horner):

روش سوم

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P'_0(x) = a_n$$

۰ جمع

۰ ضرب

$$P'_1(x) = \overset{\text{ضرب}}{x} P'_0(x) + a_{n-1} = a_n x + a_{n-1}$$

۱ ضرب

۱ جمع

$$P'_2(x) = x P'_1(x) + a_{n-2} = a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$$

۱ ضرب

۱ جمع

$$P'_3(x) = x P'_2(x) + a_{n-3} = a_n x^3 + a_{n-1} x^2 + a_{n-2} x + a_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P'_K(x) = x P'_{K-1}(x) + a_{n-K} = a_n x^K + \cdots + a_{n-K}$$

۱ ضرب

۱ جمع

یک n را در جمله قبل ضرب کن و ضریب که تا الان از آن استفاده نشده هم اضافه کن.

$$P'_n(x) = x P'_{n-1}(x) + a_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

برای جمله n ام

تعداد ضرب؟ $\underbrace{T(n) = T(n-1)}_{\text{حکم استقرا}} + \overset{\text{ضرب}}{1} = n$ ضرب

n جمع

روش ۳ از دو روش قبل بهتر است.

مثال 2: تحقیق

کدگذاری: کد باینری که به n تا شی یا symbol به طوری که:

1- طول کد کمینه باشد. ⇐ $\lceil \log_2^n \rceil$ (برای n شی)

2- کدهای متوالی فقط در یک بیت اختلاف داشته باشند.

کدگذاری یکتا نیست

	کدها	اختلاف	کدگذاری	اختلاف
1	000		000	
2	001	1 بیت	100	1
3	010	2 بیت	110	1
4	011	1 بیت	010	1
5	100	3 بیت	011	1
6	101	1 بیت	111	1
7	110	2 بیت	101	1
8	111	1 بیت	001	1

* چون اول و آخر هم در یک بیت اختلاف دارند حلقه تشکیل شده ⇐ کدگذاری بسته

* کد اول و آخر بیش از یک بیت اختلاف دارند ⇐ کدگذاری باز

انواع کدگذاری: 1- باز 2- بسته

با دیدگاه استقرایی: توان 2 کامل

حالت 1: اگر $n=2^k$ باشد می‌توان کدگذاری بسته k بیتی نوشت.

$\log_2 2^k = k$

پایه استقرا $k=1$: 0 1 ✓

$k=2$: 0 1 / 1 0 ⇒ 00, 01, 11, 10

$k=3$ (از $k=2$ استفاده می‌کنیم):

000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100

بازدید گام استقرایی :

فرض برای $n = 2^{k-1}$ کدگذاری بسته $k-1$ بیتی می‌توان نوشت

0	1	1	1
0	2	1	2
0	3	1	3
⋮		⋮	
0	2^{k-1}	1	2^{k-1}

حکم : 2^k کدگذاری - طول k - بسته

حالت 2 : اگر n زوج باشد، کدگذاری بسته با طول $[\log n]$ می‌توان نوشت .

$n = 2m = 2\,\frac{n}{2}$

پایه : $n=2$ 0

$k=1$ 1

فرض : برای $\frac{n}{2}$ ($2 \leq k < n$ ،) می‌توان کدگذاری با طول $[\log k]$ نوشت .

(فقط برای این حالت $k = \frac{n}{2}$ می‌خواهیم)

$n = 2\,\frac{n}{2}$

0	1	1	1
0	2	1	2
0	3	1	3
⋮		⋮	
0	$n/2$	1	$n/2$

$\Rightarrow$ $2(\frac{n}{2})$ کدگذاری

$\leftarrow$ n کدگذاری - بسته

$\frac{n}{2}$ کد $\rightarrow [\log \frac{n}{2}] = [\log n - \cancel{\log 2}]$

$= [\log n] - 1$

n کد $\rightarrow [\log \frac{n}{2}] + 1 = [\log n]$

حالت 3 : اگر n فرد باشد، کدگذاری باز با طول $\lceil \log n \rceil$ می‌توان نوشت.

وقتی n فرد است ⇐ n+1 زوج است

برای n+1 ⇐ کدگذاری بسته با طول $\lceil \log(n+1) \rceil$ وجود دارد.

برای n+1 کدگذاری می‌نویسیم پس یکی از کدها را حذف می‌کنیم. و

چون آخری حذف شده بسته بودن آن از بین می‌رود.

1
2
3

طول کد: $\lceil \log(n+1) \rceil = \lceil \log n \rceil$

چون $\log$ عدد فرد کامل نیست پس باید سقف آن را حساب کرد که عدد بعدی می‌شود.

$n=10 \rightarrow n=\overset{\text{فرد}}{5} \Rightarrow n=6 \rightarrow n=3 \Rightarrow n=4 \rightarrow n=2$

طول $=4$.

n=2	n=4	n=3	n=6	
0	0 0	1 1	0 1 1	1 1 1
1	~~0 1~~	1 0	0 1 0	1 1 0
	1 1	0 0	0 0 0	1 0 0
	1 0			

n=5

~~0 1 0~~	0 0 0
0 0 0	1 0 0
1 0 0	1 1 0
1 1 0	1 1 1
1 1 1	0 1 1
0 1 1	

n=10

به شکل مقابل

طایان

مثال 3: ستاره مشهور (celebrity):

n نفر داریم با حداقل تعداد پرسش تعیین کنید آیا بین این n نفر ستاره ی مشهوری وجود دارد یا نه؟

اگر فردی که هیچ کس را نشناسد و همه آن را بشناسند.

از فرد A می پرسیم آیا فرد B را می شناسد؟ (شناختن رابطه دو طرفه نیست)

حداکثر چند پرسش؟ $\binom{n}{2} \times 2 = n(n-1)$ هر دو نفری ۲ پرسش می خواهد.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$O(n^2)$

دیدگاه استقرا:

$n=1$ ✗

فرض کنیم بین $n-1$ نفر مسئله ستاره مشهور حل شده است. و $T(n-1)$ پرسش انجام شده

$n-1$ نفر:

- ستاره وجود ندارد ← اگر ستاره ای باشد همان فرد nام است.
- ستاره وجود دارد
  - ستاره $n-1$ نفر، برای فرد nام هم ستاره است / ← 2 تا پرسش جدید $T(n-1)+2$
  - ستاره $n-1$ نفر، برای فرد nام ستاره نیست.

(خود فرد nام ممکن ستاره باشد)

$2(n-1)$ تا پرسش جدید.

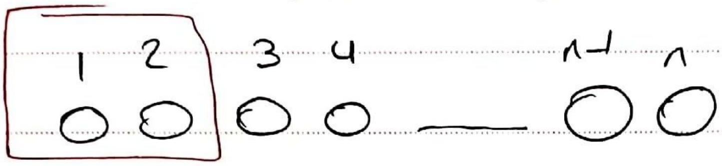
$$T(n-1) + \underbrace{(n-1)}_{\text{از افراد قبلی}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{از فرد } n} = T(n-1) + 2(n-1)$$

$$T(n) = T(n-1) + 2(n-1) \longrightarrow T(n) = O(n^2)$$

استقرای هوشمندانه:

حالت بد: فرد nام (فرد جدید) ممکن بود ستاره باشد.

← از این باید اجتناب کنیم.



① پرسش

از فرد 1 می‌پرسیم آیا فرد 2 را می‌شناسد؟

بله ← فرد 1 ستاره نیست.

خیر ← فرد 2 ستاره نیست.

← فردی که ستاره نیست از مجموعه nتایی کم می‌کنیم. ← n−1 فرد باقی ماند.

← طبق فرض استقرا ← T(n−1) پرسش ← ستاره ندارد X

همان پرسشی که یک نفر را کنار گذاشت

دارند. (2 پرسش جدید)

$$T(n) = T(n-1) + 1 + 2 \leq 3(n-1) = O(n)$$

یعنی با کنار گذاشتن هر نفر 3 تا پرسش اضافه می‌شود.

← فرد کنار گذاشته شده ستاره را بشناسد و ستاره فرد کنار گذاشته شده را نشناسد.

در 17 جزوه قبلی ← راه حل اشتباه *

و فیلم